Aufgabe 1. Sei S_4 die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

(1) Zeichne das Gitter aller Untergruppen von S_4 und kennzeichne welche Untergruppen konjugiert sind.

(2) Bestimme die Konjugationsklassen von S_4 und die Klassengleichung.

Beweis. Wir verwenden im Beweis mehrfach die allgemeine Formel

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\dots\sigma(i_k)) \tag{1}$$

für alle $\sigma \in S_n$ und $(i_1 i_2 \dots i_k) \in S_n$ k-Zykel. Unsere Strategie zur Bestimmung aller Untergruppen ist wie folgt: Wir bestimmen nach und nach alle Untergruppen von S_4, welche von n Elementen erzeugt sind, für $n = 1, 2, \dots$.

(1) Wir bestimmen also zunächst alle zyklischen Gruppen:

Ordnung	Untergruppen
1	$\langle(1)\rangle$
2	$\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(14)\rangle, \langle(23)\rangle, \langle(24)\rangle, \langle(34)\rangle,$ $\langle(12)(34)\rangle, \langle(13)(24)\rangle, \langle(14)(23)\rangle$
3	$\langle(123)\rangle, \langle(124)\rangle, \langle(134)\rangle, \langle(234)\rangle$
4	$\langle(1234)\rangle, \langle(1324)\rangle, \langle(1243)\rangle$

Wir behaupten, dass diese Liste vollständig ist. In der Tat ist jedes Element von S_4 ein Erzeuger einer der obigen zyklischen Untergruppen. Dies zeigen wir, indem wir einfach alle Erzeuger, die in den aufgelisteten Untergruppen vorkommen zählen: In den Untergruppen der Ordnung 1 gibt es einen Erzeuger, in den Untergruppen der Ordnung 2 gibt es insgesamt 9 Erzeuger (ein Erzeuger in jeder der Untergruppen), in den Untergruppen der Ordnung 3 gibt es insgesamt 8 Erzeuger (in jeder Untergruppen 2 Erzeuger) und in den Gruppen der Ordnung 4 gibt es insgesamt 6 Erzeuger (in jeder Untergruppe 2 Erzeuger). Die Summe aller Erzeuger ist also $24 = |S_4|$.

(2) Wir bestimmen nun die nichtzyklischen Untergruppen $H \leq S_4$, die von zwei Elementen x und y erzeugt werden, indem wir eine Fallunterscheidung bezüglich der Ordnungen von x und y machen (ohne Einschränkung $\operatorname{ord}(x) \geq \operatorname{ord}(y)$):

(a) $\operatorname{ord}(x) = 4$, $\operatorname{ord}(y) = 3$. Dann muss die Ordnung von H mindestens 12 sein, also der Index höchstens 2, so dass H normal ist. Dann enthält aber H *alle* Elemente der Ordnung 3 und 4 (da diese konjugiert zu x bzw. y sind). Nach Vorlesung ist aber die von allen 3-Zykeln erzeugte Untergruppe schon $A_4 \leq S_4$. Also enthält H sowohl A_4 als auch Elemente der Ordnung 4, die also nicht in A_4 liegen. Dann muss aber H schon ganz S_4 sein.

(b) $\operatorname{ord}(x) = 4$, $\operatorname{ord}(y) = 4$. Wir nehmen zunächst an, dass $x = (1234)$. Dann rechnen wir alle möglichen Produkte xy aus:

$$\begin{aligned}
(1234)(1324) &= (142)\\
(1234)(4231) &= (243)\\
(1234)(1243) &= (132)\\
(1234)(3421) &= (143)
\end{aligned}$$

Nach Fall 2a gilt also $H = S_4$. Im allgemeinen Fall ist x konjugiert zu (1234) und damit die von x und y erzeugte Untergruppe konjugiert zu S_4, also $H = S_4$.

(c) $\text{ord}(x) = 4$, $\text{ord}(y) = 2$. Zunächst nehmen wir an, dass $y = (ij)$ eine Transposition ist.

  i. Falls $y = (ij)$ und $x(i) = j$ oder $x(j) = i$, dann ist xy ein 3-Zykel und damit $H = S_4$ nach 2a.

  ii. Andernfalls gilt $x = (abcd)$ mit $a = i$ und $c = j$. Dann gilt auch $yx = x^{-1}y$ (explizite Rechnung), so dass die Menge

$$H = \{e, x, x^2, x^3, y, yx, yx^2, yx^3\}$$

  eine Untergruppe der Ordnung 8 bildet, welche von x und y erzeugt ist. Wir können $x = (abcd)$ interpretieren als die Wirkung einer Rotation um $\pi/2$ auf den Eckpunkten eines Quadrates welche mit a,b,c, und d gegen den Uhrzeigersinn numeriert sind. Die Wirkung von y korrespondiert dann zu einer Diagonalspiegelung dieses Quadrates und die gesamte Untergruppe H wirkt als die euklidische Symmetriegruppe des Quadrats. Insbesondere sehen wir also, dass die Gruppe H eindeutig durch die Wahl der Untergruppe $\langle x \rangle$ bestimmt ist und nicht von der spezifischen Wahl von y abhängt. Für die 3 unterschiedlichen Wahlen von $\langle x \rangle$ erhalten wir also 3 solcher Untergruppen nämlich

$$\langle (1234), (13) \rangle, \langle (1324), (12) \rangle, \langle (1243), (14) \rangle$$

  welche alle isomorph zur Diedergruppe D_4 sind.

Falls y keine Transposition ist, dann ist y von der Form $(ij)(kl)$. Es gibt dann zwei zu unterscheidende Fälle: Entweder gilt $y \in \langle x \rangle$ (also $y = x^2$). In diesem Falle ist natürlich $\langle x, y \rangle = \langle x \rangle$. Andernfalls können wir y als eine horizontale/vertikale Spiegelung des oben erwähnten Quadrates mit Eckpunkten a, b, c und d interpretieren. Dieselbe Argumentation wie in 2(c)ii zeigt, dass $\langle x, y \rangle$ als die euklidische Symmetriegruppe dieses Quadrats wirkt. Also ist $\langle x, y \rangle$ eine der 3 Diedergruppen aus 2(c)ii.

(d) $\text{ord}(x) = 3$ und $\text{ord}(y) = 3$. In diesem Fall gilt nach Vorlesung $\langle x, y \rangle = A_4$.

(e) $\text{ord}(x) = 3$ und $\text{ord}(y) = 2$. Sei i der Fixpunkt von x bezüglich der Operation von S_4 auf $\{1, 2, 3, 4\}$.

  i. Falls $y(i) \neq i$, dann ist yxy^{-1} ein 3-Zykel welcher nicht in $\langle x \rangle$ enthalten ist. In diesem Falle gilt also $\langle x, yxy^{-1} \rangle = A_4$ nach Vorlesung. Also, da $y \notin A_4$ weiterhin $H = S_4$.

  ii. Falls $y(i) = i$, dann ist y eine Transposition und $\langle x, y \rangle$ ist die Untergruppe

$$\{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$$

  isomorph zu $D_3 \cong S_3$. Wieder hängt diese Untergruppe nur von $\langle x \rangle$ ab und nicht der spezifischen Wahl von y. Es gibt also genau 4 solcher Untergruppen, nämlich

$$\langle (123), (12) \rangle, \langle (124), (12) \rangle, \langle (134), (13) \rangle, \langle (234), (23) \rangle.$$

(f) $\mathrm{ord}(x) = 2$ und $\mathrm{ord}(y) = 2$. Auch hier gibt es wieder mehrere Fälle:

i. x und y sind disjunkte Transpositionen, also $xy = yx$. Dann ist

$$\langle x, y\rangle = \{e, x, y, xy\}$$

isomorph zur Kleinschen Vierergruppe $C_2 \times C_2$. Wir erhalten so die drei Untergruppen

$$\langle (12), (34)\rangle, \langle (13), (24)\rangle, \langle (14), (23)\rangle.$$

Eine dieser Gruppen erhalten wir auch, falls x vom Zykeltyp $(ab)(cd)$ ist und y entweder (ab) oder (cd) ist.

ii. x und y sind nicht disjunkte Transpositionen, dann erzeugen sie eine der Gruppen isomorph zu S_3 aus 2(e)ii.

iii. x und y sind unterschiedliche Elemente vom Zykeltyp $(ab)(cd)$. Dann liegen sie in A_4 und erzeugen eine weitere Kleinsche Vierergruppe

$$\langle x, y\rangle$$

die schon in der Vorlesung diskutiert wurde.

iv. x ist von der Form $(ab)(cd)$, y ist eine Transposition, aber keine der Transpositionen (ab) oder (cd). Dann ist $\langle x, y\rangle$ die Diedergruppen aus $2(c)ii$, wobei x als horizontale/vertikale Spiegelung und y als Diagonalspiegelung wirkt.

(3) Wir beschreiben nun die Untergruppen, welche von drei Elementen erzeugt werden, oder anders gesagt, diejenigen Untergruppen der Form $H' = \langle H \cup \{x\}\rangle$ wobei $H \leq S_4$ eine der nichtzyklischen Untergruppen aus 2 ist und $x \in S_4 \setminus H$. Wie sich herausstellen wird, treten in diesem Schritt keine neuen Untergruppen auf, so dass wir also schon alle Untergruppen gefunden haben: Wir machen eine Fallunterscheidung bezüglich des Isomorphietyps von H, also D_4, A_4, S_3, oder $C_2 \times C_2$.

(a) $H \cong A_4$. Dann gilt natürlich $H' = S_4$.

(b) $H \cong D_4$. Dann gilt einerseits, dass 8 die Ordnung von H' andererseits teil $|H'| > |H|$ die Ordnung 24 von S_4. Damit folgt $H' = S_4$.

(c) $H \cong S_3$. Dann teilt 6 die Ordnung von H'. Falls die Ordnung von H' 12 ist, dann hat H' Index 2 und ist somit normal. Dann enthält aber H' alle Transpositionen, da jede der Untergruppen S_3 eine Transposition enthält, und alle Transpositionen konjugiert sind. Also gilt $H' = S_4$.

(d) $H \cong C_2 \times C_2$. Sei zunächst $H \leq A_4$, also $H = \langle (12)(34), (13)(24)\rangle$. Falls $x \in A_4$, dann gilt $H' = A_4$ nach Vorlesung. Wenn dies nicht der Fall ist, dann unterscheiden wir:

i. $\mathrm{ord}(x) = 2$. Dann ist $x = (ij)$ also eine Transposition. Wir interpretieren x als eine Diagonalspiegelung, eines Quadrates in dem die Eckpunkte mit $1, 2, 3, 4$ numeriert sind und sich die Eckpunkte i und j diagonal gegenüberliegen. Wie oben folgt jetzt, dass die ganze Gruppe H' dann als Symmetriegruppe dieses Quadrats wirkt und damit eine der Diedergruppen aus 2(c)ii.

ii. $\mathrm{ord}(x) = 4$. Dann gilt $x = (abcd)$ und wirkt x als Rotation um $\pi/2$ eines Quadrats mit Eckpunkten numeriert durch a, b, c, d gegen den Uhrzeigersinn. H' wirkt dann als volle Symmetriegruppe dieses Quadrats, ist also wieder eine der Diedergruppen aus 2(c)ii.

Sein nun H eine der Untergruppen isomorph zu $C_2 \times C_2$ aber $H \not\leq A_4$, also ist H von zwei disjunkten Transpositionen (ij) und (kl) erzeugt. Wir unterscheiden:

i. $\mathrm{ord}(x) = 2$. Falls x eine Transposition ist, dann muss diese die Mengen $\{i, j\}$ und $\{k, l\}$ bijektiv aufeinander abbilden. Dann ist aber klar, dass x zusammen mit den disjunkten Transpositionen aus H ganz S_4 erzeugt. Falls x keine Transposition ist, dann ist $x = (ab)(cd)$ mit $(ab) \neq (ij)$. Dann wirkt H' als Symmetriegruppe eines Quadrats mit Eckpunkten i,k,j,l numeriert im (oder gegen den) Uhrzeigersinn ist also eine der Diedergruppen aus 2(c)ii.

ii. $\mathrm{ord}(x) = 3$. Dann enthält H' eine der Untergruppen isomorph zu S_3. Damit ist die Ordnung von H' mindestens 12. Also ist H' normal, enthält damit alle Transpositionen, also $H' = S_4$.

iii. $\mathrm{ord}(x) = 4$. Dann gilt $x = (abcd)$. Falls $x(i) = j$ oder $x(j) = i$, dann gibt es einen 3-Zykel in H', so dass nach 2a gilt: $H' = S_4$. Andernfalls, wirkt H' als Symmetriegruppe des Quadrats mit Eckpunten a, b, c, d und ist eine der Untergruppen aus 2(c)ii.

(4) Der Algorithmus terminiert hier, da im letzten Schritt der Beschreibung der von 3 Elementen erzeugten Untergruppen keine neuen Untergruppen aufgetreten sind. Die Liste der gefundenen Untergruppen ist damit also vollständig.

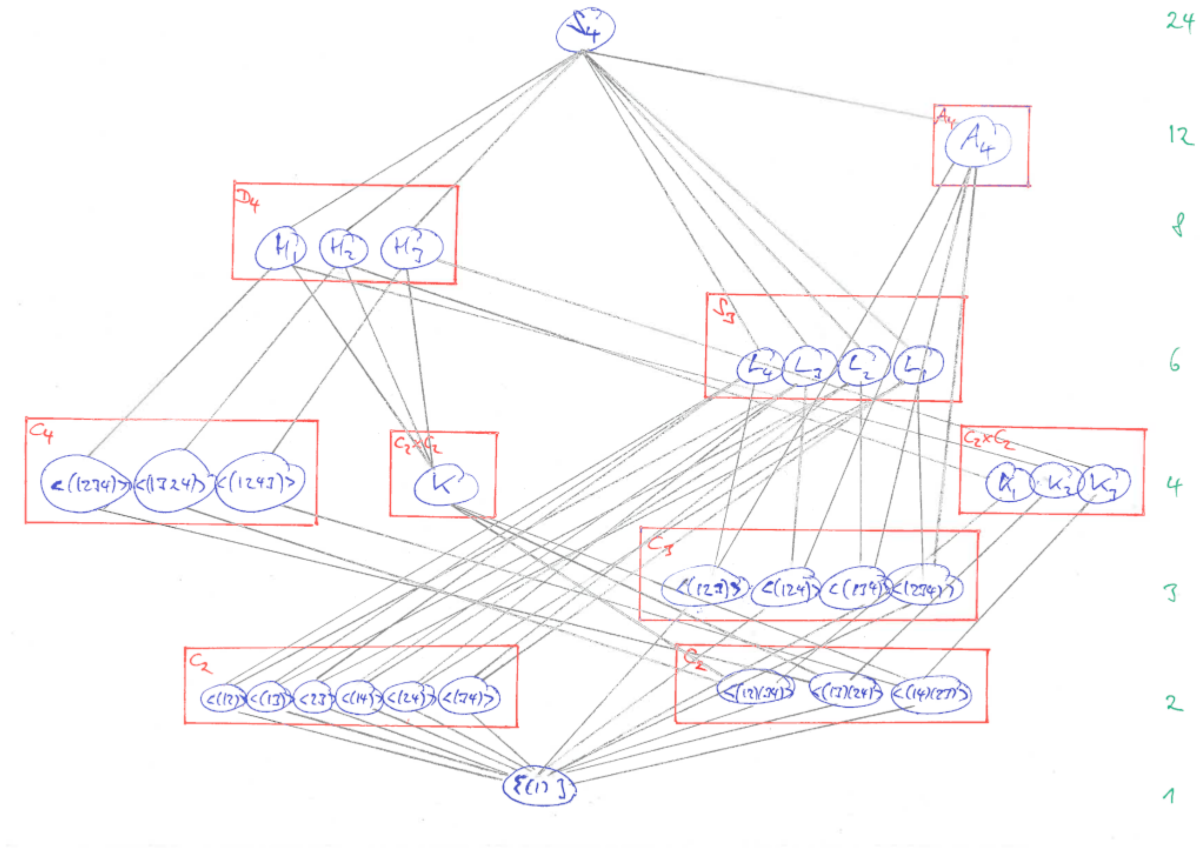
Zusammenfassend, gibt es also zusätzlich zu den zyklischen Untergruppen in S_4 die folgenden Untergruppen:

Isomorphietyp	Untergruppen
$C_2 \times C_2$	$K_1 = \langle (12), (34) \rangle$
	$K_2 = \langle (13), (24) \rangle$
	$K_3 = \langle (14), (23) \rangle$
	$K = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$
D_4	$H_1 = \langle (1234), (13) \rangle$
	$H_2 = \langle (1324), (12) \rangle$
	$H_3 = \langle (1243), (14) \rangle$
S_3	$L_1 = \langle (234), (23) \rangle$
	$L_2 = \langle (134), (13) \rangle$
	$L_3 = \langle (124), (12) \rangle$
	$L_4 = \langle (123), (12) \rangle$
A_4	$A_4 = \langle (123), (234) \rangle$
S_4	$S_4 = \langle (1234), (12) \rangle$

Es gibt also insgesamt genau 30 Untergruppen in S_4. Mittels Formel (1) lassen sich leicht die Konjugationsklassen von Untergruppen ablesen: Unter den zyklischen Untergruppen ist die Konjugationsklasse durch den Zykeltyp eines Erzeugers bestimmt. Unter den nichtzyklischen Gruppen sind die Konjugationsklassen

$$\{K_1, K_2, K_3\}, \{K\}, \{H_1, H_2, H_3\}, \{L_1, L_2, L_3, L_4\}, \{A_4\}, \{S_4\}.$$

Da alle Gruppen explizit bestimmt sind, können wir jetzt auch das Gitter der Untergruppen fertigstellen (größeres Bild hinten).



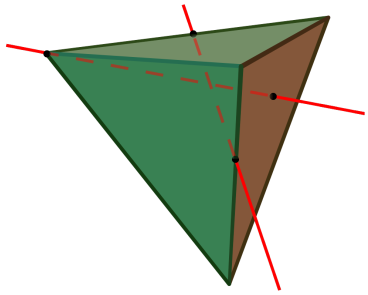
Die Klassengleichung folgt jetzt natürlich auch direkt, man hätte sie aber auch ohne das genaue Verständnis des Untergruppengitters bestimmen können, da die Konjugationsklassen der Elemente von S_4 einfach zu den Zykeltypen korrespondieren. Sie lautet:

$$24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6.$$

Um unser Verständnis zu komplettieren, versuchen wir unsere Ergebnisse geometrisch zu verstehen. Die Möglichkeit dazu kommt von der Tatsache, dass die Gruppe S_4 isomorph zur euklidischen Symmetriegruppe

$$\mathrm{Sym}(T) = \{A \in O(3, \mathbb{R}) | A(T) = T\} \leq E(3)$$

eines Tetraeders T ist:



Auf dem letzten Übungsblatt hatten wir schon gesehen, dass A_4 die Gruppe der Rotationssymmetrien von T ist, so dass diese Aussage nicht sehr überraschend ist. Wir zeigen sie wie folgt:

1. Zunächst lassen wir $\mathrm{Sym}(T)$ auf den Eckpunkten von T operieren, welche wir willkürlich mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ numerieren. Wir erhalten also einen Homomorphismus
$$\lambda : \mathrm{Sym}(T) \longrightarrow S_4.$$
Falls eine Bewegung $g \in \mathrm{Sym}(T)$ alle Eckpunkte $1, 2, 3, 4$ festhält, also $\lambda(g) = e$, dann muss g die Identität sein. Also gilt $\mathrm{Kern}(\lambda) = 0$, so dass der Homomorphismus λ injektiv ist.

2. Wir werden nun zeigen, dass λ auch surjektiv ist, indem wir die Elemente von $\mathrm{Sym}(T)$ zählen. Dazu lassen wir $\mathrm{Sym}(T)$ auf der Menge der 4 Flächen des Tetraeders operieren. Der Stabilisator einer Fläche D besteht genau aus denjenigen Bewegungen welche die Achse vom Schwerpunkt des Dreiecks D zum gegenüberliegenden Eckpunkt fixieren. Dies ist eine Diedergruppe $D_3 \cong S_3$ hat also Ordnung 6. Da die Operation von $\mathrm{Sym}(T)$ auf der Menge seiner Flächen transitiv ist, gilt also nach der Bahnformel $|\,\mathrm{Sym}(T)| = 6 \cdot 4 = 24$, so dass λ surjektiv sein muss.

Alle Untergruppen von S_4 haben nun eine geometrische Interpretation in diesem Kontext. Zum Beispiel korrespondieren die 4 Untergruppen L_1, L_2, L_3, und L_4 (isomorph zu S_3) genau zu den Stabilisatoruntergruppen der 4 Flächen bezüglich der Operation von $\mathrm{Sym}(T)$ auf der Menge seiner Flächen. Da die Operation transitiv ist, folgt sofort, dass die Stabilisatoren konjugiert sind.

Am interessantesten ist vielleicht die Interpretation der Untergruppen H_1, H_2 und H_3: Man betrachte die Menge M der 3 Achsen welche die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten von T verbinden. Dann operiert $\mathrm{Sym}(T)$ auf M. Die Untergruppen H_i korrespondieren dann genau zu den Stabilisatoren der 3 Achsen. Die Tatsache, dass diese Gruppen isomorph zu Diedergruppen sind, kann man sehr schön geometrisch verstehen: Man projeziert parallel zu der jeweiligen Achse auf die zu dieser Achse senkrecht stehende Ebene durch den Ursprung. Das Bild des Tetraeders unter dieser Projektion ist ein Quadrat, der Stabilisator der Achse operiert auf dem projezierten Quadrat durch ebene Bewegungen, und wird dabei mit der ebenen Symmetriegruppe des Quadrats, also D_4, identifiziert. Weiterhin fixieren die drei 180°-Drehungen um die drei Achsen in M alle Achsen in M und sind deshalb Elemente im Schnitt der drei Stabilisatoren H_1, H_2 und H_3. Diese drei Drehungen bilden, zusammen mit der Identität, genau die Kleinsche Vierergruppe K. Es ist unterhaltsam, nach weiteren geometrischen Interpretationen des Untergruppengitters Ausschau zu halten. $\square$

Aufgabe 2. Sei $n \geq 3$ und sei
$$D_n \leq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$
die von der Teilmenge
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$
erzeugte Untergruppe.

(1) Zeige $|D_n| = 2n$.

(2) Sei $\tau(n)$ die Anzahl von positiven Teilern von n und $\sigma(n)$ die Summe über alle positiven Teiler (z.B. gilt $\tau(6) = 4$ und $\sigma(6) = 12$). Zeige dass die Gruppe D_n genau $\tau(n) + \sigma(n)$ Untergruppen hat und bestimme diese.

(3) Bestimme die Konjugationsklassen von D_n und die Klassengleichung.

Beweis. Wir definieren
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
und
$$x = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}.$$
Durch direktes Nachrechnen, verifizieren wir:
$$\begin{aligned} \mathrm{ord}(y) &= 2 \\ \mathrm{ord}(x) &= n \\ yx &= x^{-1}y. \end{aligned}$$
Es folgt dann, dass die von x und y erzeugte Untergruppe genau
$$D_n = \{e, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, y, yx, yx^2, \ldots, yx^{n-1}\}$$
ist. Insbesondere also $|D_n| = 2n$. Geometrisch korrespondieren das Element x^k zu einer Drehung mit Winkel $2\pi k/n$ und yx^k zu einer Spiegelung an einer Achse, die vom Vektor
$$\begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi k}{n}) \\ \sin(-\frac{\pi k}{n}) \end{pmatrix}$$
aufgespannt wird. Wir können die Gruppe D_n also auffassen als die ebene Symmetriegruppe eines regulären n-gons.

Wir bestimmen zunächst die Konjugationsklassen und die Klassengleichung. Es gilt
$$yxy = x^{-1} = x^{n-1} \tag{2}$$
so dass also, für jedes $0 \leq k \leq n$, x^{n-k} konjugiert zu x^{-k} ist. Weiterhin gilt
$$x^{-1}yx = yx^2 \tag{3}$$
so dass also y konjugiert ist zu yx^{2k}, $k \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) $n = 2m+1$ ungerade. Dann gilt für alle $0 < k < n$, dass $x^k \neq x^{n-k}$. Also sind die Mengen
$$\{x^k, x^{n-k}\}$$
für $k = 1, \dots, m$ Konjugationsklassen. Desweiteren gilt $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle$, so dass es für jedes Element yx^k ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x^k = x^{2m}$. Also sind alle Spiegelungen yx^k wegen (3) konjugiert. Die Klassengleichung lautet demnach
$$2n = 1 + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{m} + n.$$

b) $n = 2m$ gerade. Dann sind für $0 < k < n$, $k \neq m$, $x^k \neq x^{n-k}$ aber $x^m = x^{-m}$. Damit liegt also x^m im Zentrum von D_n. Zudem teilen sich die Spiegelungen in zwei Konjugationsklassen auf, nämlich die Mengen
$$\{yx^k | k \text{ gerade}\}$$
und
$$\{yx^k | k \text{ ungerade}\}.$$
Demnach ergibt sich die Klassengleichung
$$2n = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{m} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

Wir bestimmen nun die Untergruppen von D_n. Zunächst haben wir die Untergruppen der Drehgruppe $C_n \leq D_n$. Da $C_n = \langle x \rangle$ eine zyklische Gruppe ist, folgt dies aus der Vorlesung. Zu jedem Teiler $d|n$ mit $dl = n$ gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung d, nämlich die Untergruppe $\langle x^l \rangle$. Dies liefert also genau die $\sigma(n)$ Untergruppen der Aufgabenstellung.

Für eine Untergruppe $H \leq D_n$ mit $H \not\leq C_n$ bildet zunächst $H' = (H \cap C_n) \leq C_n$ eine Untergruppe, also gilt $H' = \langle x^l \rangle$ für $ld = n$. Es gibt desweiteren ein Element $s = yx^k \in H \setminus H'$ das also eine Spiegelung sein muss. Da die Spiegelungen genau diejenigen Matrizen in $O(2, \mathbb{R})$ mit Determinante -1 sind, ist es klar, dass sich H disjunkt zerlegt als
$$H = H' \cup sH'$$
wobei sH' aus den Spiegelungen in H besteht und Multiplikation mit s eine Bijektion zwischen H' und sH' induziert. Insbesondere hat also H die Ordnung $2d$. Die Menge sH' besteht genau aus den Spiegelungen
$$\{s, sx^l, sx^{2l}, \dots, sx^{(d-1)l}\}$$
Umgekehrt sehen wir aus dieser Beschreibung, dass für jede vorgegebene Spiegelung s, die Untergruppe $\langle x^l, s \rangle$ von D_n Ordnung $2d$ hat. Desweiteren gilt
$$\langle x^l, s \rangle = \langle x^l, s' \rangle$$
genau dann, wenn $s' = sx^{kl}$ für $k \in \mathbb{N}$. Demnach bilden die l Gruppen
$$\langle x^l, sx^r \rangle$$

mit $0 \leq r < l$, genau die Untergruppen H von D_n für die gilt $H \nleq C_n$ und $H \cap C_n = \langle x^l \rangle$. Wenn wir also alle diese Untergruppen für alle Teiler $d|n$ zählen, erhalten wir genau $\tau(n)$ Untergruppen H für die gilt $H \nleq C_n$. Insgesamt ergibt dies also $\tau(n) + \sigma(n)$ Untergruppen.

Wieder ist es instruktiv sich die Untergruppen von D_n geometrisch zu veranschaulichen indem wir D_n mit der Symmetriegruppe des n-gons identifizieren. Dazu numerieren wir die Eckpunkte des n-gons gegen den Uhrzeigersinn mit den Zahlen 1,2,. . . ,n.

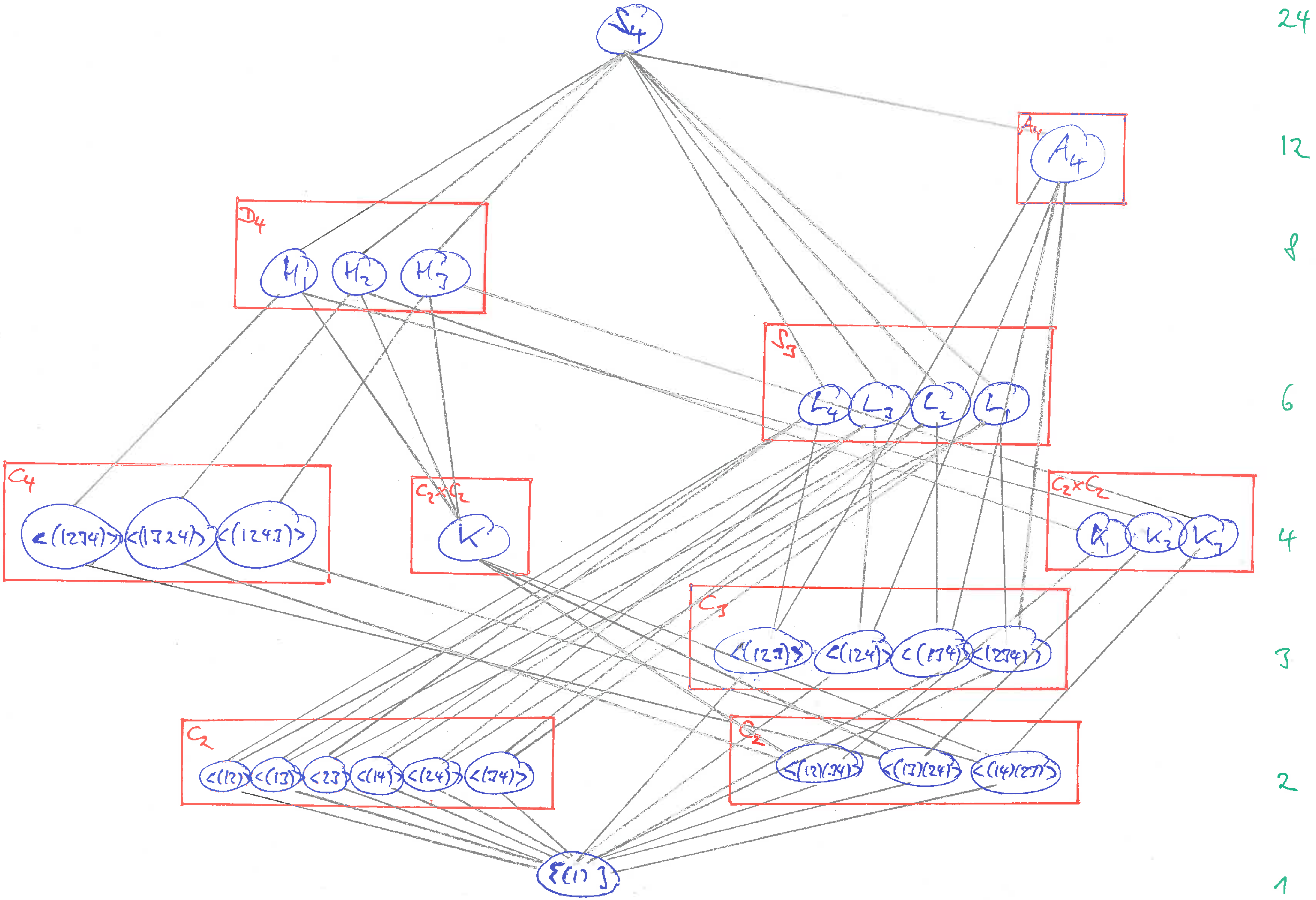
Man sieht direkt einen recht gravierenden Unterschied zwischen den Fällen n ungerade/gerade: Für ungerades n ist jede Spiegelung gegeben indem man an einer Achse spiegelt, die einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet. Für gerades n gibt es zwei verschiedene Sorten von Spiegelungen: es gibt $\frac{n}{2}$ Spiegelungen an Achsen, welche gegenüberliegende Eckpunkte verbinden, und $\frac{n}{2}$ Spiegelungen an Achsen, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten verbinden. Dies erklärt die obigen unterschiedlichen Aufteilungen der Spiegelungen in Konjugationsklassen bei der Diskussion der Klassengleichung.

Sei nun ein Teiler $d|n$ mit $dl = n$ gegeben, und sei zunächst n ungerade. Für jedes $1 \leq k \leq l$, bildet dann die Menge

$$P_k = \{k, k + l, k + 2l, \dots, k + (d-1)l\}$$

die Eckpunkte eines regulären d-gons, welches in dem grossen n-gon eingeschrieben ist. Die Gruppe D_n operiert auf der Menge $\{P_k | 1 \leq k \leq l\}$ dieser eingeschriebenen d-gone. Die Stabilisatoren der einzelnen d-gone P_k korrespondieren dann genau zu den Untergruppen $H \leq D_n$ mit $H \notin C_n$ und $H \cap C_n = \langle x^l \rangle$. Diese zyklische Gruppe $\langle x^l \rangle$ kann dann aufgefasst werden als die Gruppe derjenigen Drehungen, die ein eingeschriebenes d-gon (und dann auch alle anderen d-gone P_k) stabilisieren.

Noch interessanter wird es, wenn n gerade ist. Wir illustrieren das Phänomen an einem Beispiel: In einem Hexagon gibt es genau zwei verschiedene eingeschriebene reguläre Dreiecke. Allerdings ist die Stabilisatoruntergruppe beider Dreiecke gleich (und nicht nur konjugiert), es entsteht so anstatt der erwarteten $6/3 = 2$ Untergruppen vom obigen Typ also nur eine als Stabilisator eines solchen eingeschriebenen Dreiecks. Die fehlende Untergruppe kann aber beschrieben werden, als die Symmetriegruppe eines eingeschriebenen Dreiecks, dessen Eckpunkte an den Mittelpunkten von Kanten des Pentagons liegen. Im Fall n ungerade, müssen also sowohl d-gone welche an den Eckpunkten des n-gons eingeschrieben sind, als auch d-gone, welche an den Mittelpunkten der Kanten eingeschrieben sind herangezogen werden, um alle Untergruppen geometrisch als Stabilisatoren zu beschreiben. Wir überlassen die detailliertere Analyse dem Leser. □



S4
A4
D4
H1 H2 H3
S3
L4 L3 L2 L1
C4
<(1234)> <(1324)> <(1243)>
C2×C2
K
K1 K2 K3
C3
<(123)> <(124)> <(134)> <(234)>
C2
<(12)> <(13)> <23> <(14)> <(24)> <(34)>
<(12)(34)> <(13)(24)> <(14)(23)>
{(1)}
24
12
8
6
4
3
2
1