Algebra - Übungszettel 9 (Abgabe: 18.12.19)

Aufgabe 1. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Der Quotientenring $K = \mathbb{F}_7[T]/(T^3 - 2)$ ist ein Körper und das Polynom $X^3 - 2$ zerfällt in $K[X]$ in Linearfaktoren.

(b) Der Quotientenring $L = \mathbb{Q}[T]/(T^3 - 2)$ ist ein Körper und das Polynom $X^3 - 2$ zerfällt in $L[X]$ nicht in Linearfaktoren.

Aufgabe 2. Sei $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimme Formeln für die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ wie folgt:

1. Reduziere durch eine geeignete Transformation auf die Form $f = X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Betrachte den Ansatz $X = U - V$ für unabhängige Variablen U und V und zeige, dass Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3UV - p &= 0 \\ U^3 - V^3 + q &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   eine Lösung der Gleichung $f(X) = 0$ ergeben.

3. Reduziere die Lösung von (1) auf die Lösung einer quadratischen Gleichung in $Y = U^3$ und zeige, dass die Lösungen von (1) von der Form

$$\begin{aligned} U &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ V &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \tag{2}$$

   sind, wobei geklärt werden muss, wie die Quadratwurzeln (die zunächst nur bis auf Vorzeichen bestimmt sind) und die kubischen Wurzeln (die zunächst nur bis auf Multiplikation mit dritten Einheitswurzeln bestimmt sind) gewählt werden sollen. Bestimme alle Lösungen von (1).

4. Leite nun Formeln für die drei Nullstellen (möglicherweise mit Multiplizität) von f ab.

5. Wende diese Formeln an, um die Nullstellen des Polynoms $X^3 + 3X^2 + 9X + 9$ zu bestimmen.

Aufgabe 3. (a) Betrachte das Polynom $f = X^3 + 6X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$. Zeige wie folgt, dass f irreduzibel ist:

1. Sei $f = (X + a)(X^2 + bX + c)$ eine Faktorisierung in $\mathbb{Z}[X]$.

2. Schließe aus der induzierten Faktorisierung in $\mathbb{F}_3[X]$, dass gilt: $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ und $c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.
3. Führe dies zum Widerspruch.

(b) Verallgemeinere das Resultat von (a) zu folgender Aussage: Sei p eine Primzahl und sei $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom, so dass gilt:

(i) $\mathrm{ggT}(a_n, \ldots, a_0) = \pm 1$,

(ii) p teilt a_n nicht,

(iii) p teilt alle anderen Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$,

(iv) p^2 teilt a_0 nicht.

Dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Sei p eine Primzahl. Zeige, dass das Polynom

$$f = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Tipp: Beachte, dass f ein Teiler von $X^p - 1$ ist und wende den Koordinatenwechsel $X = Y + 1$ an.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, sei $f = X^2 + aX + b \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, und sei $L = K[X]/(f)$. Sei $G(L/K)$ die Gruppe (unter Komposition) der Körperautomorphismen von L welche K festhalten, also bijektive Ringhomomorphismen $\varphi : L \to L$ so dass für alle $\lambda \in K$ gilt $\varphi(\lambda) = \lambda$. Zeige: Die Gruppe $G(L/K)$ ist isomorph zur zyklischen Gruppe C_2.