Algebra - Übungszettel 7 (Abgabe: 04.12.19)

Aufgabe 1. (1) Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeige, dass die Menge $\operatorname{End}(A, +)$ der Gruppenhomomorphismen von A nach A (*Endomorphismen*) einen Ring bildet bezüglich den Verknüpfungen welche durch die folgenden Formeln gegeben sind: $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$ und $(\varphi \cdot \psi)(a) = \varphi(\psi(a))$ wobei $\varphi, \psi \in \operatorname{End}(A, +)$ und $a \in A$.

(2) Jeder Ring R ist, mittels des Homomorphismus

$$R \to \operatorname{End}(R, +), r \mapsto L_r,$$

wo $L_r : R \to R, a \mapsto ra$, isomorph zu einem Unterring eines Endomorphismenrings.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ existiert. Ein Element $u \in R$ heißt *Einheit*, falls u ein multiplikatives Inverses hat, also $v \in R$ mit $uv = 1$. Zeige:

(1) Die Menge $N(R)$ der nilpotenten Elemente in R bildet ein Ideal in R.

(2) Für eine Einheit $u \in R$ und ein nilpotentes Element $x \in R$ ist $u + x$ eine Einheit.

Aufgabe 3. Betrachte die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{R}$ bildet einen Unterring.

(2) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist isomorph zum Quotientenring $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 2)$.

(3) Die Menge $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ der Einheiten besteht genau aus den Elementen $\{\pm\omega^n | n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\omega = 1 + \sqrt{2}$ und ist als multiplikative Gruppe isomorph zu $C_2 \times C_\infty$.

Aufgabe 4. Ein kommutativer Ring heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. Sei R ein kommutativer Ring.

(1) Der Ring R ist genau dann lokal, wenn die Menge der Nichteinheiten von R ein Ideal bildet.

(2) Ist R lokal und ist $I \subsetneq R$ ein Ideal von R, so ist auch R/I lokal.