Algebra - Übungszettel 6 (Abgabe: 27.11.19)

Aufgabe 1. Sei $W \subset \mathbb{R}^3$ der Würfel mit Eckpunkten $\{-1,1\}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Zeige:

(1) Die Drehsymmetriegruppe von W ist isomorph zu S_4.

(2) Die euklidische Symmetriegruppe von W ist isomorph zu $S_4 \times C_2$.

Tipps: Die obigen Gruppen operieren auf der Menge der Raumdiagonalen von W.

Aufgabe 2. Sei $B = \{(x,y) | -1 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\mathrm{Sym}(B) \leq E(2)$ die euklidische Symmetriegruppe von B. Zeige, dass die folgenden Elemente $\mathrm{Sym}(B)$ erzeugen:

(i) die Translationen $t_a : (x,y) \mapsto (x+a,y)$ mit $a \in \mathbb{R}$,

(ii) die Drehung $d : (x,y) \mapsto (-x,-y)$,

(iii) die Spiegelung $r : (x,y) \mapsto (-x,y)$,

(iv) die Spiegelung $s : (x,y) \mapsto (x,-y)$.

Beschreibe dabei alle Elemente von $\mathrm{Sym}(B)$ explizit und stelle sie als Produkte der Erzeuger dar.

Aufgabe 3. Sei $E(1)$ die Gruppe der euklidischen Bewegungen von $\mathbb{R}^1$.

(1) Zeige, dass jedes Element von $E(1)$ entweder eine Translation oder eine Spiegelung an einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist.

(2) Bestimme die Konjugationsklassen der diskreten Untergruppen von $E(1)$.

Aufgabe 4. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Teilmenge aus Aufgabe 2.

(1) Bestimme die Konjugationsklassen aller diskreten Untergruppen $G \leq E(2)$ mit $L_G \cong \mathbb{Z}$.

(2) Zeige, dass es in jeder dieser Konjugationsklassen eine Gruppe der Form $\mathrm{Sym}(F)$ mit $F \subset B$ gibt.

Tipps:

1. Bis auf Reskalierung des Erzeugers von L_G gibt es genau 7 Konjugationsklassen. Finde zunächst die 7 Figuren, die diese verschiedenen Gruppen realisieren.

2. Zeige nun durch geeignete Fallunterscheidungen bezüglich der Typen von Elementen welche G enthält, dass dies tatsächlich alle Gruppen sind.