Algebra - Übungszettel 5 (Abgabe: 20.11.19)

Aufgabe 1. Für eine Gruppe G bezeichne $\mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe der Isomorphismen von G nach G unter Komposition.

(1) Bestimme die Gruppen $\mathrm{Aut}(D_4)$ und $\mathrm{Aut}(Q_8)$ für die Diedergruppe D_4 und die Quaternionengruppe Q_8.

(2) Betrachte den Homomorphismus

$$\gamma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), g \mapsto \gamma_g,$$

wobei $\gamma_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ der Konjugationsautomorphismus ist. Zeige, dass die Untergruppe $\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{Bild}(\gamma)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist und bestimme die Gruppe $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$ für $G = D_4$ und $G = Q_8$.

Aufgabe 2. Sei G die Symmetriegruppe der ebenen Figur

$\cdots$  $\cdots$

(1) Beschreibe alle Elemente von G explizit.

(2) Bestimme die Konjugationsklasse der Punktgruppe $\overline{G} \leq O(2, \mathbb{R})$.

(3) Beweise oder widerlege: Die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow L_G \longrightarrow G \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 1$$

spalted, so dass G also ein semidirektes Produkt von $\overline{G}$ und L_G ist.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{H}$ der Schiefkörper der Quaternionen. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Für $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}$ definieren wir $\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$. Für $p, q \in \mathbb{H}$, gelten dann:

  (i) $\overline{q}q = q\overline{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$.

  (ii) $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$.

(2) Die Teilmenge

$$G = \{q \in \mathbb{H} \mid q\overline{q} = 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \{0\}$$

bildet eine Untergruppe.

(3) Sei

$$V = \{xi + yj + zk | x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}.$$

Für $q \in G$ und $v \in V$ gilt $qvq^{-1} \in V$, die Abbildung

$$\gamma_q : V \longrightarrow V,\ v \mapsto qvq^{-1}$$

ist $\mathbb{R}$-linear, und die Matrix von γ_q bezüglich der $\mathbb{R}$-Vektorraum Basis (i, j, k) von V liegt in $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Weiterhin definiert die Abbildung

$$\gamma : G \longrightarrow \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}),\ q \mapsto \gamma_q$$

einen Homomorphismus.

(4) Für $v \in V$ mit $v\overline{v} = 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$q = \cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})v \in G$$

und γ_q ist eine Drehung um die von v aufgespannte Achse mit Winkel θ.

(5) Zeige, dass γ surjektiv ist und bestimme $\mathrm{Kern}(\gamma)$.

Aufgabe 4. Sei $E(2)$ die Gruppe der ebenen euklidischen Bewegungen und sei $G \leq E(2)$ eine diskrete Untergruppe.

(1) Man finde eine Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Sym}(F) = \{\mathrm{id}\}$: es gibt also keine Bewegung $T \neq \mathrm{id}$ mit $T(F) = F$.

(2) Für die Menge $F \subset \mathbb{R}^2$ aus (1), betrachte man die Menge

$$F' = \{g.x \mid g \in G, x \in F\}.$$

Zeige: $G \leq \mathrm{Sym}(F')$ aber im allgemeinen $G \neq \mathrm{Sym}(F')$.

(3) Zeige, dass F so gewählt werden kann, dass gilt $G = \mathrm{Sym}(F')$.