Algebra - Übungszettel 4 (Abgabe: 13.11.19)

Aufgabe 1. Eine Gruppe der Ordnung 55 operiere auf einer Menge mit 39 Elementen. Zeige, dass es einen Fixpunkt gibt.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und sei $Z(G)$ das Zentrum von G.

(1) Beweise: Falls die Quotientengruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist, dann ist G abelsch.

(2) Beweise oder widerlege: Falls die Quotientengruppe $G/Z(G)$ abelsch ist, dann ist G abelsch.

Aufgabe 3. Zeige, dass jede euklidische Bewegung von $\mathbb{R}^2$ eine der folgenden Abbildungen ist:

(1) Translation τ_b mit $b \in \mathbb{R}^2$,

(2) Drehung $\delta_{x,\theta}$ um einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel θ,

(3) Spiegelung σ_l an einer Geraden l,

(4) Gleitspiegelung $\tau_b\sigma_l$ wobei $0 \neq b \in \mathbb{R}^2$ parallel zur Geraden l ist.

Tipps zum Beweis:

A. Man überlege sich geometrisch, dass für jede orientierungserhaltende Bewegung β (die also nach Vorlesung von der Form $\tau_b\delta_{0,\theta}$ ist) gilt: Falls β keine Translation ist, dann hat β einen Fixpunkt.

B. Man zeige, dass jede orientierungsumkehrende Bewegung von der Form $\tau_b\sigma_l$ ist und finde dann eine Gerade, welche von dieser Bewegung auf sich selbst abgebildet wird.

Aufgabe 4. Eine *kurze exakte Sequenz von Gruppen*

$$\{1\} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{1\}$$

besteht aus

1. Gruppen N,G, und H,
2. einem injektiven Gruppenhomomorphismus $i : N \to G$,
3. einem surjektiven Gruppenhomomorphismus $p : G \to H$,

so dass $\mathrm{Bild}(i) = \mathrm{Kern}(p)$. Wir sagen die Sequenz *spaltet*, falls es einen Homomorphismus $s : H \to G$ gibt, so dass $p \circ s = \mathrm{id}_H$. In diesem Falle heißt der Homomorphismus s ein *Schnitt* von p.

(1) Seien H und N Gruppen und H operiere auf N via Homomorphismen. Zeige: Dann existiert eine spaltende kurze exakte Sequenz

$$\{1\} \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes H \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{1\}.$$

(2) Sei

$$\{1\} \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow \{1\}$$

eine spaltende kurze exakte Sequenz mit Schnitt s. Zeige: Dann definiert Konjugation mit $s(H)$ eine Operation von H auf N via Homomorphismen, so dass G isomorph zum zugehörigen semidirekten Produkt $N \rtimes H$ ist.

(3) Zeige: Für $n \geq 2$ ist die symmetrische Gruppe S_n ist isomorph zu einem semidirekten Product von A_n und C_2.

(4) Sei $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ die Quaternionengruppe. Zeige: Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$\{1\} \longrightarrow C_2 \longrightarrow Q_8 \longrightarrow C_2 \times C_2 \longrightarrow \{1\}$$

aber Q_8 ist nicht isomorph zu einem semidirekten Produkt von C_2 und $C_2 \times C_2$.