Algebra - Übungszettel 2 (Abgabe: 30.10.19)

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe.

(1) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe, und $N \trianglelefteq G$ eine normale Untergruppe. Zeige: Die Zuordnung
$$g(N \cap H) \mapsto gN$$
definiert einen Isomorhpismus
$$H/(N \cap H) \xrightarrow{\cong} NH/N.$$

(2) Seien M und N normale Untergruppen von G mit $M \leq N$. Zeige: Dann ist N/M eine normale Untergruppe von G/M und es existiert ein Isomorphismus
$$(G/M)/(N/M) \xrightarrow{\cong} G/N.$$

Aufgabe 2. Bestimme alle Gruppen der Ordnungen $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ bis auf Isomorphie.

Aufgabe 3. Zeige: Die Gruppe von Rotationssymmetrien eines Tetraeders ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_4.

Aufgabe 4. Betrachte die Untergruppe
$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$$
von Matrizen A mit ganzzahligen Einträgen und $\det(A) \in \{+1, -1\}$.

(1) Welche komplexen Zahlen können Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ mit endlicher Ordnung sein?

(2) Zeige: Ein Element endlicher Ordnung in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ hat die Ordnung $1, 2, 3, 4$ oder 6.

(3) Finde Elemente in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ der Ordnungen $1, 2, 3, 4, 6$ und ∞.