# Algebra - Bonuszettel (Abgabe: 05.02.20)

**Aufgabe 1.** Sei $G$ eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe.

(1) Zeige: Falls $[G : H] = 2$, so ist $H \leq G$ normal.

(2) Beweise oder widerlege: Falls $[G : H] = 3$, so ist $H \leq G$ normal.

**Aufgabe 2.** Zerlege die folgenden Polynome in irreduzible Faktoren:

(1) $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(2) $X^7 + 11X^3 - 33X + 22 \in \mathbb{Q}[X]$

(3) $X^4 + 15X^3 + 7 \in \mathbb{Z}[X]$

**Aufgabe 3.** Sei $G$ die Drehsymmetriegruppe eines Ikosaeders $I$. Betrachte die Operation von $G$ auf

(1) den Eckpunkten von $I$,

(2) den Kanten von $I$,

(3) den Flächen von $I$,

bestimme jeweils die Kardinalität eines Stabilisators und verifiziere die Bahnformel.

**Aufgabe 4.** Sei $L/K$ eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $K \subset L_1 \subset L$ und $K \subset L_2 \subset L$, so dass $L_1/K$ und $L_2/K$ galoissch sind, und so dass es keinen echten Teilkörper von $L$ gibt, der $L_1 \cup L_2$ enthält. Zeige:

(1) Die Körpererweiterung $L/K$ ist galoissch.

(2) Der Homomorphismus

$$\rho : G(L/K) \to G(L_1/K) \times G(L_2/K),\ \sigma \mapsto (\sigma_{|L_1}, \sigma_{|L_2})$$

ist injektiv.

(3) Falls $L_1 \cap L_2 = K$ so ist $\rho$ ein Isomorphismus.

**Aufgabe 5.** Sei $L/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^{15} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(1) Bestimme die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ und das Gitter aller Untergruppen von $G(L/\mathbb{Q})$.

(2) Finde für jeden Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset M \subset L$ ein Element $x \in L$ mit $M = \mathbb{Q}(x)$.

**Aufgabe 6.** Sei $q = p^n$ eine Primpotenz und sei $\mathbb{F}_q$ . Zeige: Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_q^*$ ist zyklisch.