Algebra - Übungszettel 13 (Abgabe: 29.01.20)

Aufgabe 1. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 welches genau eine reelle Nullstelle besitzt. Zeige, dass die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von f isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Aufgabe 2. Sein K ein Körper. Man führe unter Anwendung der induktiven Strategie im Beweis des Hauptsatzes über symmetrische Funktionen folgende Rechnungen aus:

(1) Drücke das symmetrische Polynom

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \in K[X_1, \ldots, X_n],$$

$n \geq 1$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $e_1, \ldots, e_n$ aus.

(2) Drücke das symmetrische Polynom

$$(X_1 - X_2)^2 (X_1 - X_3)^2 (X_2 - X_3)^2 \in K[X_1, X_2, X_3]$$

als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen e_1, e_2, e_3 aus. Folgere, dass die Diskriminante eines Polynoms

$$f(X) = X^3 + pX + q \in K[X]$$

durch die Formel $D = -4p^3 - 27q^2$ gegeben ist.

Aufgabe 3. Sei L'/K eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $K \subset L \subset L'$ und $K \subset K' \subset L'$ so dass es keine echten Teilkörper von L' gibt, welche L und K' enthalten. Sei L/K eine Galoiserweiterung.

(1) Zeige, dass die Erweiterung L'/K' galoissch ist.

(2) Zeige, dass die Restriktionsabbildung einen Isomorphismus

$$G(L'/K') \cong G(L/L \cap K')$$

definiert und folgere, dass sich die Galoisgruppe $G(L'/K')$ mit einer Untergruppe von $G(L/K)$ identifizieren lässt.

Tipp: Jede Galoiserweiterung ist Zerfällungskörper eines separablen Polynoms.

Aufgabe 4. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})})$. Zeige:

(1) Die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ ist galoissch und $G(L/\mathbb{Q})$ is isomorph zur Quaternionengruppe Q_8.

(2) Bestimme das Gitter aller Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$.

(3) Bestimme ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ so dass L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.