

Algebra - Übungszettel 12 (Abgabe: 22.01.20)

Aufgabe 1. Sei L/\mathbb{Q} ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

- (a) Zeige, dass die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.
- (b) Finde ein $\alpha \in L$ mit $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.
- (c) Bestimme alle Untergruppen von $G(L/\mathbb{Q})$ und die zugehörigen Zwischenkörper von L/\mathbb{Q} .

Aufgabe 2. Es seien p_1, p_2, \dots, p_n paarweise verschiedene Primzahlen. Sei L/\mathbb{Q} ein Zerfällungskörper des Polynoms

$$(X^2 - p_1)(X^2 - p_2) \cdots (X^2 - p_n) \in \mathbb{Q}[X].$$

Zeige, dass L/\mathbb{Q} galoissch ist und bestimme die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 3. Sei L/K eine Erweiterung endlicher Körper. Zeige: Es gibt ein Element $\alpha \in L$ so dass $L = K(\alpha)$. Tipp: Bestimme per Galois-Korrespondenz alle Zwischenkörper von L/K , und zeige die Existenz von α durch Abzählen derjenigen Elemente von L , welche in echten Zwischenkörpern enthalten sind.

Aufgabe 4. Sei L/\mathbb{Q} der Zerfällungskörper des Polynoms $X^8 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimme die Galoisgruppe $G(L/\mathbb{Q})$, das Gitter der Untergruppen von $G(L/\mathbb{Q})$ und die zugehörigen Zwischenkörper von L/\mathbb{Q} .