Algebra - Übungszettel 11 (Abgabe: 15.01.20)

Aufgabe 1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, sei $a \in K$, und sei L/K der Zerfällungskörper von $X^p - a$. Bestimme die Gruppe $G(L/K)$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei M/K eine endliche Körpererweiterung. Zeige: Es gibt eine Körpererweiterung L/M so dass L/K galoissch ist.

Aufgabe 3. Sei L/K eine Galoiserweiterung. Zeige: Besitzt ein irreduzibles Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle in L, dann zerfällt f in $L[X]$ in ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren. Tipp: Betrachte die Operation von $G(L/K)$ auf L.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und $K \subset M \subset L$ ein Zwischenkörper.

(a) Zeige wie folgt, dass es ein $\alpha \in M$ gibt, so dass $M = K(\alpha)$.

1. Es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M$ so dass $M = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
2. Mit $H = G_{\alpha_1} \cap \dots \cap G_{\alpha_n}$ gilt $M = L^H$.
3. Es gibt $\lambda \in K$ so dass für alle $\sigma \in G$ gilt: $\sigma(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \alpha_1 + \lambda\alpha_2$ genau dann wenn $\sigma \in G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2}$. (Verwende hierzu die Annahme, dass K unendlich viele Elemente hat.)
4. Folgere $K(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = K(\alpha_1, \alpha_2)$.
5. Zeige nun per Induktion die gewünschte Aussage.

(b) Zeige, dass L/K Zerfällungskörper eines irreduziblen, separablen Polynoms $f \in K[X]$ ist.