Algebra - Übungszettel 10 (Abgabe: 08.01.20)

Aufgabe 1. (1) Sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Zeige: Der Körper $K[X]/(f)$ ist ein Erweiterungskörper von K vom Grad $[K[X]/(f) : K] = \mathrm{grad}(f)$.

(2) Sei nun $f = X^3 - 9X^2 + 3X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige dass f irreduzibel ist und bestimme einen Vertreter (in $\mathbb{Q}[X]$) des multiplikativen Inversen der Klasse von $1 + X + X^2$ in $\mathbb{Q}[X]/(f)$.

Aufgabe 2. Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in L$ heißt *algebraisch über* K, falls a Nullstelle eines nichtkonstanten Polynoms mit Koeffizienten in K ist. Sei $a \in L$ algebraisch über K. Sei $K(a) \subset L$ der kleinste Unterkörper von L welcher K und a enthält. Zeige:

(1) Es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom $f_a \in K[T]$ mit den Eigenschaften:

  (i) f_a ist irreduzibel.

  (ii) Der Leitkoeffizient von f_a ist 1.

  (iii) $f_a(a) = 0$.

(2) Für jedes Polynom $g \in K[T]$ mit $g(a) = 0$ gilt $f_a | g$.

(3) $K(a) \cong K[T]/(f_a)$.

Tipp: Betrachte den Auswertungshomomorphismus $K[T] \to L, f \mapsto f(a)$.

Aufgabe 3. Sei L/K eine Körpererweiterung.

(1) Zeige: Ein Element $a \in L$ ist algebraisch über K genau dann wenn $[K(a) : K] < \infty$.

(2) Zeige: Die Menge $\overline{K}_L \subset L$ aller Elemente von L welche algebraisch über K sind bildet einen Unterkörper von L.

(3) Zeige oder widerlege: Der Grad $[\overline{K}_L : K]$ ist endlich.

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ und sei $\mathbb{Q}(\zeta) \subset \mathbb{C}$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}$ welcher $\mathbb{Q}$ und ζ enthält.

(1) Schließe aus schon bekannten Resultaten, dass $T^{p-1} + T^{p-2} + \cdots + 1$ irreduzibel ist und dass $\mathbb{Q}(\zeta)$ isomorph zum Körper $\mathbb{Q}[T]/(T^{p-1} + T^{p-2} + \cdots + 1)$ ist. Bestimme $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.

(2) Zeige, dass das Polynom $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + 1$ in $\mathbb{Q}(\zeta)[X]$ in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt.

(3) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimme die Galoisgruppe $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.