Algebra - Übungszettel 1 (Abgabe: 23.10.19)

Aufgabe 1. (1) Seien A, B Untergruppen einer Gruppe G. Zeige:

$$A \cup B \leq G \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ or } B \subseteq A.$$

(2) Bestimme die Menge aller Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3 und veranschauliche die Relation $\leq$ in einer Zeichung.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe.

(1) Zeige: Für alle $g, h \in G$ gilt $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{ord}(hg)$.

(2) Sei $G = \langle g \rangle$ zyklisch der Ordnung n. Bestimme die Ordnung von g^s für $1 \leq s \leq n$.

Aufgabe 3. Sei

$$H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

die Teilmenge von Matrizen A mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und $\det(A) = 1$.

(1) Zeige dass H eine Untergruppe ist.

(2) Zeige dass, für $n \geq 2$, die Teilmenge

$$H(n) \subset H$$

von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, d \equiv 1 \pmod n$ und $b, c \equiv 0 \pmod n$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 4. Sei $n \geq 2$ und sei e_{ij} die reelle $n \times n$-Matrix mit Eintrag 1 an der Stelle (i, j) und allen anderen Einträgen 0. Sei weiterhin I_n die Einheitsmatrix. Wir definieren die folgenden Mengen von Matrizen:

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{I_n + a e_{ij} \mid a \in \mathbb{R},\ 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j\} \\ E_2 &:= \{I_n + e_{ij} + e_{ji} - e_{ii} - e_{jj} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \\ E_3 &:= \{I_n + (a-1) e_{ii} \mid 0 \neq a \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

Bestimme die Untergruppen

$$\langle E_1 \rangle, \langle E_2 \rangle, \langle E_3 \rangle, \langle E_1 \cup E_2 \rangle, \langle E_1 \cup E_3 \rangle, \langle E_2 \cup E_3 \rangle, \langle E_1 \cup E_2 \cup E_3 \rangle$$

von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.